18. Demostrar que si $y = f(x)$ admite derivada en el intervalo $a \leq x \leq b$, y $f(x)$ presenta un máximo relativo en el punto $x = x_0$, siendo $a < x_0 < b$, se verifica $f'(x_0) = 0$.

Como $f(x)$ presenta un máximo relativo en $x = x_0$, para todo Δx, siendo $|\Delta x|$ suficientemente pequeño,

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0) \qquad \text{y} \qquad f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$$

Ahora bien cuando $\Delta x < 0$, $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$ y $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0$.

y cuando $\Delta x > 0$, $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$ y $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leqslant 0$.

Por tanto, $0 \leq f'(x_0) \leq 0$, y $f'(x_0) = 0$, como se quería demostrar. Ver Problema 34 para el mínimo relativo.

19. Demostrar el criterio de la segunda derivada para hallar máximos y mínimos: Si $f(x)$ y $f'(x)$ admiten derivada en el intervalo $a \leq x \leq b$, el punto $x = x_0$, siendo $a < x_0 < b$, representa un valor crítico de $f(x)$, y $f''(x_0) > 0$, la función $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = x_0$.

Como $f''(x_0) > 0$, $f'(x)$ es creciente en $x = x_0$ y existirá un $h > 0$ tal, que $f'(x_0 - h) < f'(x_0) < f'(x_0 + h)$. Por tanto, para valores de x inferiores a x_0, $f'(x) < f'(x_0)$, y para valores de x superiores a x_0, $f'(x) > f'(x_0)$. Ahora bien, como $f'(x_0) = 0$, $f'(x) < 0$ para $x < x_0$, y $f'(x) > 0$ para $x > x_0$. Estas son las condiciones (ver Problema 18) que aseguran la existencia de un mínimo relativo de la función $f(x)$ en el punto $x = x_0$. Se deja para el alumno, la demostración del teorema análogo para el máximo relativo.

20. Consideremos el problema de situar sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ un punto (X, Y) cuya distancia a uno dado $P(a, 0)$, siendo $a > 0$, sea mínima. De la expresión que da la distancia entre dos puntos, se deduce $D^2 = (X - a)^2 + Y^2$, y por pertenecer el punto (X, Y) a la hipérbola, $X^2 - Y^2 = 1$.

Expresando D^2 en función X solamente, resulta:

$$f(X) = (X - a)^2 + X^2 - 1 = 2X^2 - 2aX + a^2 - 1$$

cuyo valor crítico de esta función es $X = \frac{1}{2}a$.

Si tomamos $a = \frac{1}{2}$, no habrá ningún punto sobre la hipérbola, porque Y se hace imaginario para el valor crítico $X = \frac{1}{4}$. Dibujando la figura correspondiente se vería claramente que el punto de la hipérbola más próximo al $P(\frac{1}{2}, 0)$ es el $V(1, 0)$. Por tanto, lo que se trata en este caso es hallar el mínimo de la función $f(X) = (X - \frac{1}{2})^2 + X^2 - 1$ con la condición de que $X \geq 1$. (Obsérvese que esta condición no la lleva implícitamente la función $f(X)$. Esta función, sin poner condición alguna, presenta un mínimo relativo en el punto $X = \frac{1}{4}$.) En el intervalo $X \geq 1$, $f(X)$ tiene un mínimo absoluto en el extremo $X = 1$, que no es un mínimo relativo. Se deja como ejercicio para el alumno el estudio del problema cuando (i) $a = \sqrt{2}$ y (ii) $a = 3$.

Problemas propuestos

21. Determinar los intervalos en los que son crecientes y decrecientes cada una de las funciones del Problema 1.

Sol. (*a*) Crec. $x < 0$; Dec. $x > 0$. (*b*) Crec. $x > 3$, Dec. $x < 3$. (*c*) Crec. $-5/2 < x < 0$; Dec. $0 < x < 5/2$. (*d*) Crec. $x > 4$.

22. (*a*) Demostrar que $y = x^5 + 20x - 6$ es una función creciente para todos los valores de x.

(*b*) Demostrar que $y = 1 - x^3 - x^7$ es una función decreciente para todos los valores de x.

23. Hallar los máximos y mínimos, aplicando el criterio de la primera derivada, de las funciones siguientes:

(*a*) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ — *Sol.* $x = -1$ mínimo relativo $= -4$

(*b*) $f(x) = 3 + 2x - x^2$ — *Sol.* $x = 1$ máximo relativo $= 4$

(*c*) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ — *Sol.* $x = \frac{2}{3}$ mínimo relativo $= -256/27$; $x = -2$ máximo relativo $= 0$

(*d*) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$ — *Sol.* $x = 1$ máximo relativo $= -4$; $x = 3$ máximo relativo $= -8$

(*e*) $f(x) = (2 - x)^3$ — *Sol.* No tiene ni máx. ni mín. relativos

(*f*) $f(x) = (x^2 - 4)^2$ — *Sol.* $x = 0$ máximo relativo $= 16$; $x = \pm 2$ mínimo relativo $= 0$